16as Olimpíadas Nacionais de Astronomia

Prova Eliminatória

6 de Abril de 2022
15:00 (Continente e Madeira) / 14:00 (Açores)
Duração máxima – 120 minutos

Notas:

- Lê atentamente todas as questões.
- As 6 primeiras perguntas são de escolha múltipla.
- Existe uma tabela com dados e informações úteis no final do enunciado.
- Todas as respostas devem ser dadas na folha de prova sendo devidamente assinadas.

PERGUNTAS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. Qual a idade actual do universo?

a) 14 milhões de anos

b) 4 milhões de anos

c) 4 mil milhões de anos

d) 14 mil milhões de anos

Solução: Solução: d)

2. O espectro de uma nuvem difusa de gás quente quando vista à frente de um fundo mais escuro irá mostrar:

a) riscas de emissão (brilhantes)

b) riscas de absorção (escuras)

c) um espectro contínuo

d) riscas de emissão ou de absorção, dependendo da distância a que se encontra

Solução: Solução: a)

3. O projecto *Breakthrough Listen* utiliza observações do radiotelescópio de Green Bank para tentar detectar sinais de tecnologia extraterrestre. Na figura 1 estão representados 4 espectrogramas que correspondem a simulações de sinais de tecnologia que seriam obtidos a partir de observações com esse telescópio. Um espectrograma é uma representação do

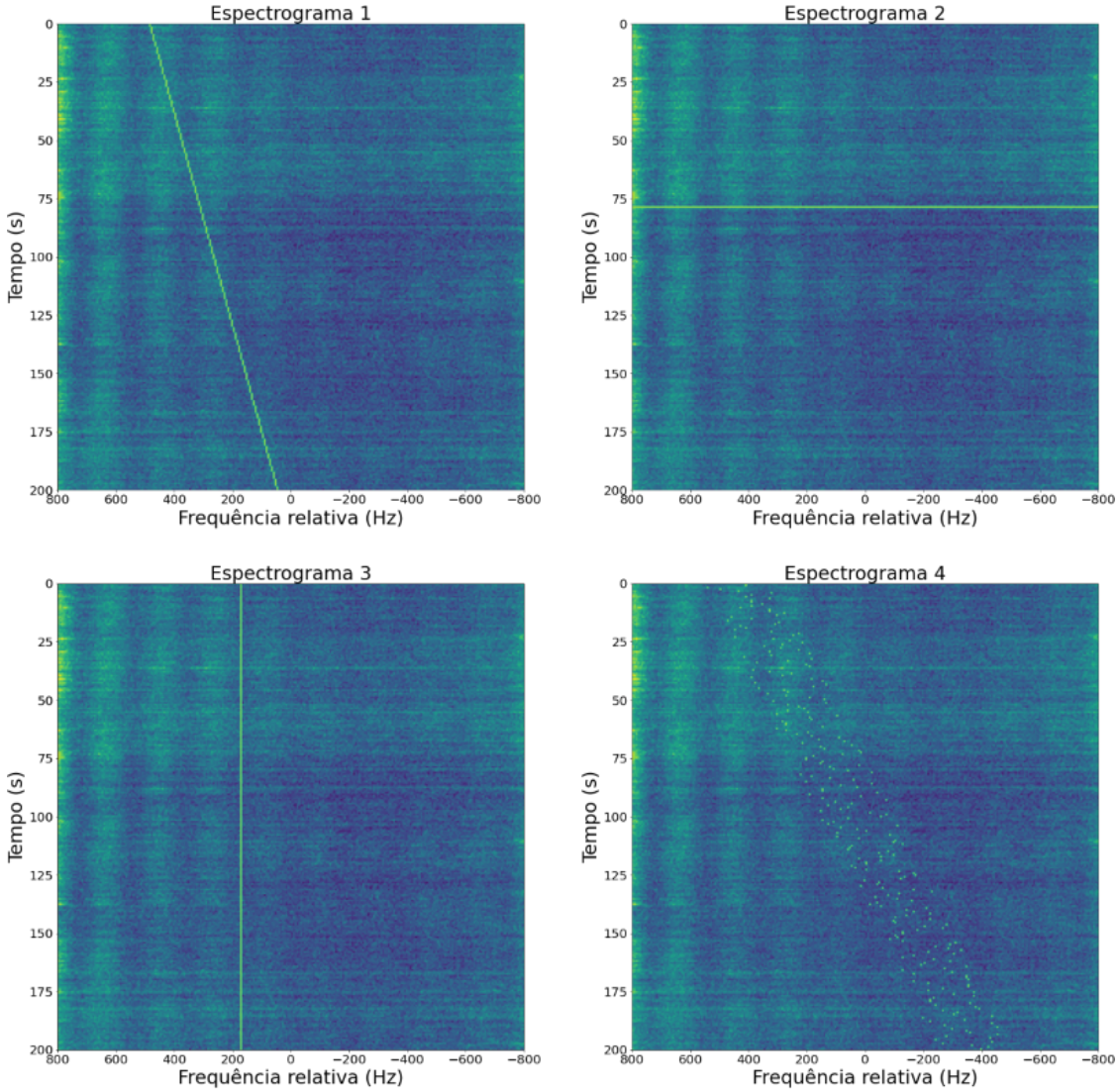


Figura 1: Espectogramas

sinal recebido em função da frequènciа electromagnética e ao longo do tempo de observação. No eixo da frequência nos gráficos seguintes, a posição zero corresponde à frequência de referência de 8419 MHz.

Estes espectrogramas correspondem a 4 casos diferentes:

i. uma nave extraterrestre a afastar-se da Terra e a emitir pulsos instantâneos em diferentes frequências

ii. a emissão de uma estação de rádio a partir de uma antena próxima do telescópio

iii. uma nave extraterrestre que emite um pulso instantâneo em todo o espectro electromagnético

iv. uma nave extraterrestre a afastar-se da Terra e a emitir um sinal a frequência constante

Qual é a associação correcta entre espectrograma e sinal tecnológico?

a) 1 - ii , 2 - iv, 3 - iii, 4 - i

b) 1 - i, 2 - ii, 3 - iii, 4 - iv

c) 1 - iv, 2 - iii, 3 - ii, 4 - i

d) 1 - iii, 2 - ii, 3 - i, 4 - iv

Solução: Solução: c)

4. As figuras abaixo mostram a trajetória da luz dentro de quatro telescópios refletores. Assinale a alternativa correta com relação aos focos:

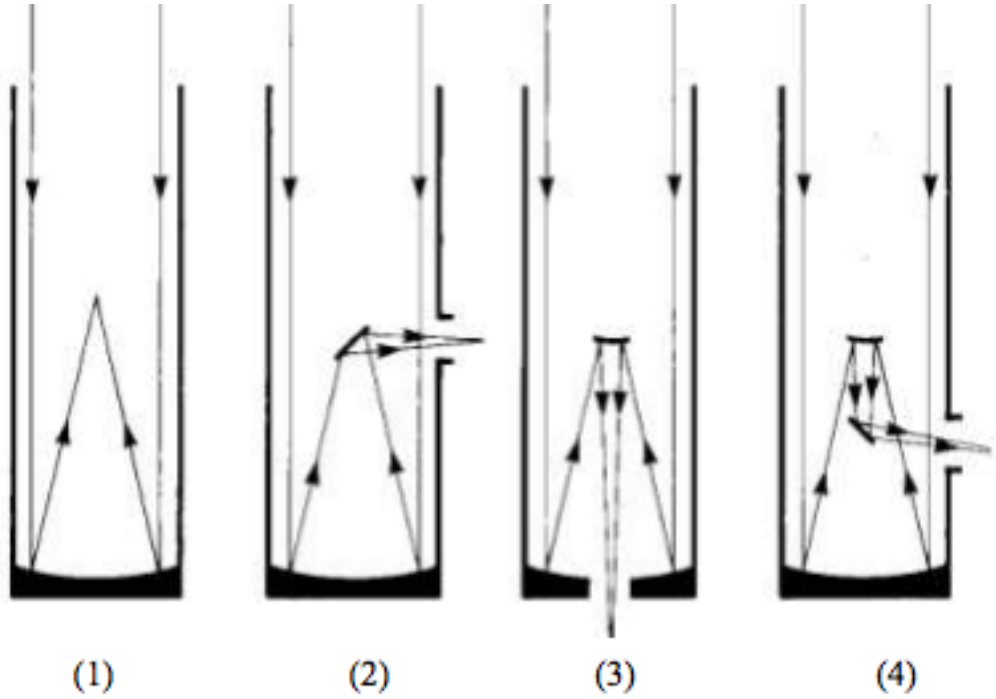


Figura 2: Telescópios reflectores

a) foco Newtoniano, foco Coudé, foco primário, foco Cassegrain

b) foco primário, foco Newtoniano, foco Cassegrain, foco Coudé

c) foco primário, foco Cassegrain, foco Newtoniano, foco Coudé

d) foco Cassegrain, foco Newtoniano, foco primário, foco Coudé

Solução: Solução: b)

5. Qual é a camada mais quente do Sol?

a) Núcleo

b) Zona de convecção

c) Zona de radiação

d) Coroa

Solução: Solução: a)

6. Qual destas linhas da esfera celeste atravessa as constelações do zodíaco?

a) Eclíptica

b) Equador Celeste

c) Meridiano

d) Zénite

Solução: Solução: a)

PERGUNTAS DE RESPOSTA LONGA

7. De acordo om a lei de Hubble, a velocidade relativa entre duas galáxias, v, depende da distância R a que estas se encontram uma da outra, como

$$v = H_0 r \ , \tag{1}$$

onde $H_0 = 74$ (km/s)/Mpc é a constante de Hubble. A descoberta desta lei experimental em 1929 corroborou a ideia de um universo em expansão.

A força gravítica entre as galáxias, no entanto, tende a desacelerar essa expansão podendo, teoricamente, parar a expansão do universo se este tiver uma densidade de matéria superior a um certo valor.

a) Considera o esquema da figura 3. Assume que as galáxias estão uniformemente distribuidas dentro da esfera e que a densidade de matéria dentro da esfera é ρ_0. Se a esfera tem raio R qual a massa total dentro dela?

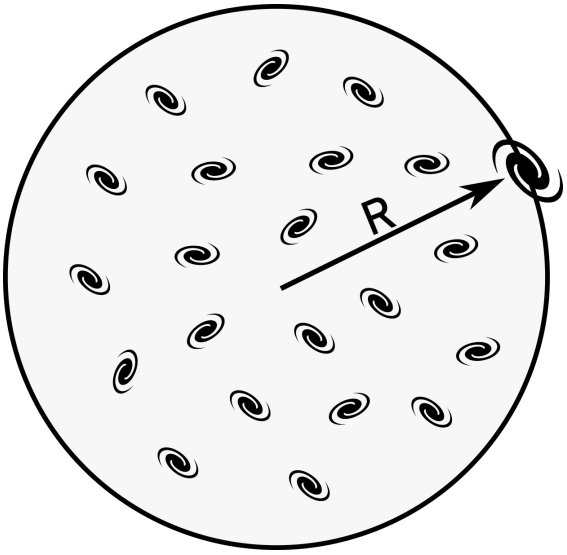


Figura 3: Esquema do universo uniforme

b) Qual a energia potencial de uma galáxia de massa m na superfície dessa esfera?

c) Qual a energia cinética dessa mesma galáxia em termos de R? (Usa a lei de Hubble)

d) Se a energia total do sistema galáxia + matéria dentro da esfera for $E_{tot} = 0$, dizemos que o sistema se encontra no estado crítico. Para que valor da densidade ρ_0 se verifica?

e) Ao observar uma pequena região do céu, contaram-se 12 galáxias num volume de 1 Mpc^3. Sendo que em média cada galáxia tem uma massa $m = 1 \times 10^{12} M_\odot$, o que podes dizer sobre a expansão do universo?

Solução:

a) A massa total dentro da esfera é

$$M = V\rho_0 = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0 \tag{2}$$

b) A energia potencial do sistema galáxia + matéria dentro da esfera é

$$E_p = -\frac{GMm}{R} = -G\left(\frac{4}{3}\pi R^2 \rho_0\right) m \tag{3}$$

c) Utilizando a lei de Hubble para expressar a velocidade da galáxia temos

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(H_0 R)^2 \tag{4}$$

d) Juntando as últimas duas respostas temos

$$E_{tot} = E_p + E_c = \frac{1}{2}m(H_0 R)^2 - G\left(\frac{4}{3}\pi R^2 \rho_0\right) m = mR^2\left(\frac{1}{2}H_0^2 - \frac{4}{3}\pi G \rho_0\right) . \tag{5}$$

Igualando a expressão a zero temos então

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \tag{6}$$

e) Substituindo os valores temos

$$\rho_{\text{medido}} = \frac{M}{V} = \frac{Nm}{V} =? < \rho_c \tag{7}$$

O universo está a expandir!

8. Um turista colombiano está a fazer uma viagem de jipe por um lugar inóspito da Terra quando tem uma avaria que o deixa incontactável e sem GPS. No entanto, ele não se deixa enervar, pois tem consigo um catálogo com coordenadas das estrelas e o seu relógio que está acertado para a hora de Bogotá (GMT-5). Para decidir em que direcção se deve mover, ele precisa primeiro de determinar as coordenadas terrestres em que se encontra. A figura 4 representa um instante nessa noite, em que o turista observa a posição de algumas estrelas.

Figura 4: Céu observado pelo turista num determinado instante.

As coordenadas equatoriais celestes das estrelas identificadas estão na tabela que se segue.

Estrela	Ascenção Recta	Declinação
Deneb	$20^h\ 41^m\ 24.54^s$	$45^\circ\ 16'\ 35''$
Dubhe	$11^h\ 03^m\ 46.05^s$	$61^\circ\ 45'\ 04''$
Kochab	$14^h\ 50^m\ 45.03^s$	$74^\circ\ 09'\ 03''$
Polaris	$02^h\ 30^m\ 45.23^s$	$89^\circ\ 16'\ 06''$

No dia seguinte, o turista regista que o Sol nasceu às 23:50 e pôs-se às 10:50 (hora de Bogotá). Estima as coordenadas terrestres (latitude e longitude) em que o turista se encontra.

Solução:

Latitude:

A latitude é dada pela altura da estrela polar Como Kochab toca o horizonte a Norte (a polar está à sua vertical), temos

$$\text{latitude} = 90^\circ - \delta(Kochab) = 90^\circ - 74^\circ 09' 03'' = 15^\circ 50' 57''\ \text{N}$$

É considerado certo se se usar 89 ou 90 graus para a declinação da estrela polar.

Longitude:

O meio dia solar local ocorre entre o nascer e o pôr do Sol. Entre as 23:50 e as 10:50 passaram-se 11h pelo que o meio dia solar local ocorre 5h30m depois do nascer do Sol, ou seja às 5h20m, hora de Bogotá. Convertendo para GMT, temos que o meio dia solar local ocorre às 5h20m + 5h = 10h20m (GMT).

Logo, a longitude em horas é

$$12h00m - 10h20m = 1h40m\ \text{E}$$

Convertendo para graus, obtemos

$$1h40m = 5/3h = 5/3 \times 15^\circ = 25^\circ\ \text{E}$$

9. Após anos de mistério, astrónomos verificam que a supergigante vermelha Betelgeuse (alfa Orionis) finalmente explodiu como supernova. A luminosidade máxima da explosão é de $1.0 \times 10^{10}\,L_\odot$. Calcula a magnitude aparente observada da Terra. Considera a distância até Betelgeuse como sendo de 550 anos-luz e despreza quaisquer efeitos de extinção interestelar e absorção atmosférica.

Solução:

Primeiramente vamos calcular a magnitude absoluta da supernova:

$$M_{SN} - M_\odot = -2,5log\left(\frac{L_{SN}}{L_\odot}\right)$$
$$M_{SN} = -2,5log(10^{10}) + 4,83$$
$$M_{SN} = -20,2$$

Calculando a distância até Betelgeuse em parsecs:

$$550ly = 550 \times (9,46 \times 10^{15}m) = 5,20 \times 10^{18}m$$
$$d = 169pc$$

Calculando agora a magnitude aparente

$$m_{SN} - M_{SN} = 5log(d) - 5$$
$$m_{SN} = 5log(169) - 5 + (-20,2)$$
$$m_{SN} = -14,1$$

Resposta: m=-14,1

10. Uma sonda espacial com 50 kg de massa encontra-se a 90 AU do Sol e move-se a 18 km/s, sem qualquer propulsão própria.

a) Calcula a energia total da sonda. (Assume que a energia potencial no infinito é nula).

b) Indica, justificando, qual o tipo de órbita desta sonda: elíptica, parabólica ou hiperbólica. (Caso não tenhas resolvido a alínea anterior, assume que a energia total é -2×10^8 J).

Solução:

a) $E_{Tot} = E_c + E_P = \frac{1}{2}mv^2 - \dfrac{GM_\odot m}{R} = 7.6 \times 10^9$ J

b) Como $E_{Tot} > 0$ a órbita é hiperbólica. Caso o aluno não resolva a alínea a) e use o valor disponibilizado para a energia total, a resposta correcta é órbita elíptica porque a energia é negativa.

11. No Sistema Solar existem 8 planetas, 5 planetas anões, mais de 200 luas e uma grande quantidade de outros corpos celestes, como asteroides e cometas. A tabela abaixo contem informação sobre os raios orbitais e as massas de alguns objetos do Sistema Solar. Supõe que todas as órbitas são circulares em torno do centro de massa do Sistema Solar (C) e que todos os objetos estão no plano da eclíptica.

Objeto	Massa (kg)	Raio Orbital (km)
Mercúrio	$3,301 \times 10^{23}$	$5,791 \times 10^{7}$
Vénus	$4,867 \times 10^{24}$	$1,082 \times 10^{8}$
Terra	$5,972 \times 10^{24}$	$1,496 \times 10^{8}$
Marte	$6,417 \times 10^{23}$	$2,279 \times 10^{8}$
Ceres	$9,470 \times 10^{20}$	$4,137 \times 10^{8}$
Júpiter	$1,898 \times 10^{27}$	$7,783 \times 10^{8}$
Saturno	$5,683 \times 10^{26}$	$1,427 \times 10^{9}$
Úrano	$8,681 \times 10^{25}$	$2,871 \times 10^{9}$
Neptuno	$1,024 \times 10^{26}$	$4,498 \times 10^{9}$
Plutão	$1,309 \times 10^{22}$	$5,906 \times 10^{10}$
Éris	$1,660 \times 10^{22}$	$1,018 \times 10^{11}$

a) Descreve qualitativamente ou desenha esquematicamente qual deve ser a configuração destes corpos em redor do Sol de modo que o ponto C esteja o mais longe possível do centro do Sol (S).

b) Supondo que os todos os planetas sejam colineares, estima a menor distância possível entre os pontos C e S.

Solução:

a) O centro de massa do Sistema Solar (C) está mais distante do centro do Sol (S) quando todos os objetos estão ao longo de uma linha e todos os planetas estão do mesmo lado do Sol.

b) Se o centro de massa do Sistema Solar estiver na origem:

$$\begin{aligned} 0 = M_{\odot}\vec{r_{\odot}} + M_{Mer}\vec{r_{Mer}} + M_{Ven}\vec{r_{Ven}} + M_{Ter}\vec{r_{Ter}} \\ + M_{Mar}\vec{r_{Mar}} + M_{Cer}\vec{r_{Cer}} + M_{Jup}\vec{r_{Jup}} + M_{Sat}\vec{r_{Sat}} \\ + M_{Ura}\vec{r_{Ura}} + M_{Nep}\vec{r_{Nep}} + M_{Plu}\vec{r_{Plu}} + M_{Eri}\vec{r_{Eri}} \end{aligned}$$

Se colocarmos Júpiter ao longo do eixo positivo, assumiremos que todos os outros planetas e o Sol estarão no lado negativo:

$$\begin{aligned} \therefore\ M_{\odot}r_{\odot} = M_{Jup}r_{Jup} - M_{Mer}r_{Mer} - M_{Ven}r_{Ven} - M_{Ter}r_{Ter} - M_{Mar}r_{Mar} \\ - M_{Sat}r_{Sat} - M_{Ura}r_{Ura} - M_{Nep}r_{Nep} - M_{Cer}r_{Cer} - M_{Plu}r_{Plu} - M_{Eri}r_{Eris} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
1,989 \times 10^{30} r_{\odot} = 1,898 \times 10^{27} \times 7,783 \times 10^{8} - 3,301 \times 10^{23} \times 5,791 \times 10^{7} \\
-4,867 \times 10^{24} \times 1,082 \times 10^{8} - 5,972 \times 10^{24} \times 1,496 \times 10^{8} \\
-6,417 \times 10^{23} \times 2,279 \times 10^{8} - 5,683 \times 10^{26} \times 1,427 \times 10^{9} \\
-8,681 \times 10^{25} \times 2,871 \times 10^{9} - 1,024 \times 10^{26} \times 4,498 \times 10^{9} \\
-9,470 \times 10^{20} \times 4,137 \times 10^{8} - 1,309 \times 10^{22} \times 5,906 \times 10^{10} \\
-1,660 \times 10^{22} \times 1,018 \times 10^{11}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
1.989 r_{\odot} = 1898 \times 778,3 - 3,301 \times 5,791 - 4,867 \times 108,2 \\
-5,972 \times 149,6 - 6,417 \times 22,79 - 568,3 \times 1427 - 86,81 \times 2871 \\
-102,4 \times 4498 - 0,9470 \times 0,4137 - 1,309 \times 590,6 - 1,660 \times 1018
\end{aligned}
$$

Ignorando todos os termos inferiores a 1000 (conforme a contagem mínima dos dados):

$$
\begin{aligned}
1,989 r_{\odot} \approx 1,477 \times 10^{6} - 0,001 \times 10^{6} - 0,811 \times 10^{6} \\
-0,249 \times 10^{6} - 0,461 \times 10^{6} - 0,001 \times 10^{6} - 0,002 \times 10^{6}
\end{aligned}
$$

$$1,989 r_{\odot} \approx -0,048 \times 10^{6}\ km$$

$$\therefore\ r_{\odot} \approx -25000\ km$$

O sinal negativo indica que estamos a compensar ligeiramente ao colocar todos os outros planetas do lado do Sol. Mover qualquer um dos gigantes gasosos para o lado de Júpiter irá claramente compensar para o outro lado. Portanto, a solução ótima seria mover todos os corpos menores (Terra e tudo menor que isso) para o lado de Júpiter. Assim teríamos Saturno, Urano, Neptuno e Sol de um lado do centro de massa e Júpiter bem como todos os outros planetas menores listados e planetas anões do outro lado do centro de massa. Com essa configuração, o centro de massa estará a cerca de 21 000 km do centro do Sol no lado oposto a Júpiter, ou seja, Sol e Júpiter devem estar no mesmo lado do centro de massa.

12. Em astronomia podemos calcular a velocidade de um objeto próximo medindo o seu movimento aparente no céu comparativamente a objectos brilhantes longínquos (normalmente usamos quasars como pontos de referência). Nós podemos usar esta técnica para medir a velocidade de estrelas perto do Sol e estimar a velocidade a que a nossa estrela se move em torno do centro galáctico. Assume que para uma estrela A a uma distância $d = 3$ pc da Terra foi medido um deslocamento de $\delta = 15.5''$ em duas observações separadas por exatamente 1 ano.

a) Assumindo que não existe componente radial na velocidade da estrela A, calcule a velocidade a que esta se desloca.

b) Tomando o valor da velocidade calculado na alínea anterior como equivalente ao movimento do Sol em torno do centro galáctico (assume uma distância do Sol ao centro galáctico de 8 kpc), calcule qual é a massa da Via Láctea interior à órbita do Sol (em

unidades de massas do sol) que é necessária para manter a órbita estável (caso não tenha resolvido a alínea anterior, assume uma velocidade de 200 km/s).

c) Uma alternativa à medição da massa da nossa galáxia consiste em somar a massa estimada de todas as estrelas visíveis (pela quantidade de luz emitida) interiores ao Sol. Usando este método obtemos um um valor para a massa de $\approx 4.5 \times 10^{10} \mathrm{M}_\odot$. Como pode explicar esta diferença?

Solução:

a) Começamos por calcular a distância física percorrida pela estrela:

$d_{\text{travel}} = \frac{\delta}{206265} d_{\text{star}} \approx 6.95 \times 10^9$ km

Estimamos a velocidade média simplesmente dividindo a distância percorrida pelo tempo entre as duas observações.

$v = d/t \approx 220$ km/s

b) Assumindo equivalência entre força gravítica e centrípeta:

$m\frac{v^2}{r} = G\frac{mM(<r)}{r^2}$

o que resolvendo para a Massa central:

$M(< r) = \frac{v^2 r}{G}$

Subsituindo os valores dá um valor $M(< r) = 9 \times 10^{10} \mathrm{M}_\odot$. Caso se tenha usado o valor para a velocidade dado na alínea, a resposta é $\approx 7.4 \times 10^{10} \mathrm{M}_\odot$.

c) Medimos menos massa através da matéria luminosa do que através da matéria total estimada pela cinemática, o que implica que existe matéria não luminosa a contribuir para a massa total da galáxia. Esta componente é chamada de matéria escura.

Tabela de Dados:

Constantes Universais

- Velocidade da luz (vazio): $c = 3 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
- Constante gravitacional: $G = 6.673 \times 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$
- Constante de Stefan-Boltzmann: $\sigma = 5.670 \times 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^2\,K^{-4}}$
- Constante de dispersão de Wien: $b = 2.8976 \times 10^{-3}\,\mathrm{m\,K}$

Dados sobre o Sol

- Massa do Sol: $M_\odot = 1.99 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$
- Raio do Sol: $R_\odot = 6.955 \times 10^8\,\mathrm{m}$
- Período médio de rotação do sol: $T = 27$ dias
- Luminosidade do Sol: $L_\odot = 3.846 \times 10^{26}\,\mathrm{W}$
- Magnitude Absoluta Visual do Sol: $M_\odot = 4.83\,\mathrm{mag}$
- Temperatura superficial do Sol: $T_{\mathrm{ef}} = 5780\,\mathrm{K}$

Dados sobre a Terra

- Massa da Terra: $M_\oplus = 5.972 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$
- Raio da Terra: $R_\oplus = 6371 \times 10^3\,\mathrm{m}$

Dados sobre a Lua

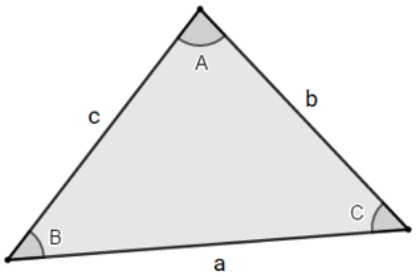
- Massa da Lua: $M_{☾} = 7.348 \times 10^{22}\,\mathrm{kg}$
- Raio da Lua: $R_{☾} = 1738 \times 10^3\,\mathrm{m}$

Conversão de unidades

- Unidade Astronómica (UA): $1\,\mathrm{UA} = 1.49 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$
- Parsec (pc): $1\,\mathrm{pc} = 3.086 \times 10^{16}\,\mathrm{m}$
- Ano-luz (ly): $1\,\mathrm{ly} = 9.46 \times 10^{15}\,\mathrm{m}$

Relações importantes

- Velocidade angular $\Omega = \dfrac{2\pi}{T}[\mathrm{rad\,s^{-1}}]$
- Lei de Stefan-Boltzmann: $L = 4\pi R^2 \sigma T_{ef}^4$
- Distância em parsec: $d_{pc} = 10^{\frac{m-M+5}{5}}$
- Magnitude absoluta: $M = -2,5\log(L) + K$, em que K é uma constante
- Lei da Gravitação Universal: $F_g = G\dfrac{Mm}{r^2}$

- Lei de Wien: $\lambda_{max} = \dfrac{b}{T}$
- Lei dos cossenos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot c \cdot \cos \hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$$