17as
Olimpíadas Nacionais de Astronomia

Prova Teórica da Final Nacional

12 de Maio de 2023
15:00
Duração máxima – 120 minutos

Notas:

- Lê atentamente todas as questões.
- As 6 primeiras perguntas são de escolha múltipla.
- Existe uma tabela com dados e informações úteis no final do enunciado.
- Todas as respostas devem ser dadas na folha de prova sendo devidamente assinadas.

PERGUNTAS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. [1 ponto] Por que é pouco provável que alguma vez encontremos uma estrela com mais de 200 massas solares?

a) Uma estrela com essa massa vai colapsar imediatamente para formar um objecto composto por matéria degenerada (como uma anã branca), anter que consiga iniciar fusão nuclear.

b) A elevada produção de radiação no núcleo da estrela irá empurrar as camadas externas da estrela, impedindo que esta acumule mais massa.

c) Uma massa tão elevada iria fazer com que a estrela girasse tão rapidamente que resultaria na ejecção das suas camadas externas.

d) Não existem nuvens moleculares gigantes com massas tão elevadas, pelo que se elas formassem uma única estrela, esta nunca atingiria 200 massas solares for falta de matéria disponível.

Solução: b)

2. [1 ponto] O que é a nutação?

a) É o movimento lento do eixo de rotação de um corpo em torno de outro eixo devido à acção do momento (torque) de uma força externa.

b) É uma oscilação periódica no período de rotação de um objecto.

c) É uma perturbação não periódica do período de rotação de um objecto.

d) É a variação periódica do ângulo de inclinação do eixo de rotação de um objecto.

Solução: d)

3. [1 ponto] Qual a diferença de magnitudes bolométricas de uma estrela variável Cefeida nos momentos de brilho máximo e mínimo, sabendo que no seu brilho máximo o raio é 1,5 vezes maior e que sua temperatura efetiva é 1,2 vezes maior relativamente ao instante de brilho mínimo.

a) 1,2

b) 1,5

c) 1,7

d) 4,7

Solução: A luminosidade é dada por $L = 4\pi R^2 T^4$. A razão entre as luminosidades máximas e mínimas é portanto

$$\frac{L_{max}}{L_{min}} = \frac{4\pi R^2_{max} T^4_{max}}{4\pi R^2_{min} T^4_{min}} \tag{1}$$

Substituindo os valores temos que $\frac{L_{max}}{L_{min}} = 4,7$. Calculando a diferença de magnitudes temos

$$m_{max} - m_{min} = -2,5 log \frac{L_{max}}{L_{min}} = -1,7 mag \tag{2}$$

Resposta correta: alternativa (c)

4. [1 ponto] Antares é um dos exemplos maiores de que objectos?

a) Anãs brancas

b) Quasares

c) Pulsares

d) Gigantes vermelhas

Solução: (d)

5. [1 ponto] Num típico enxame globular da Via Láctea, que tipo de população de estrelas é mais comum encontrar?

a) População I

b) População II

c) População III

d) População II e III

Solução: (b)

6. [1 ponto] O que originou a radiação de microondas que preenche o universo?

a) A explosão da primeira geração de estrelas.

b) A luz produzida por partículas do universo primordial, antes da formação dos átomos.

c) Partículas carregadas que se movem em campos magénticos intensos produzidos por buracos negros.

d) A combinação de todas as nebulosas de todas as galáxias do universo observável.

Solução: (b)

PERGUNTAS DE RESPOSTA LONGA

7. [2 pontos] A esfera de Hill representa a zona de influência gravítica de um corpo que orbita um corpo mais massivo. No caso do sistema Terra-Sol a esfera de Hill representa a região em torno da Terra na qual qualquer corpo está gravitacionalmente preso à Terra.

a) Considera um corpo de massa m que se encontra entre a Terra e o Sol a uma distância r da terra. Assume que a Terra tem uma órbita circular em torno do Sol com raio $a_\oplus$. No referencial centrado no Sol que roda com velocidade angular (Ω) igual à da Terra em torno do Sol (de modo a que esta permaneça em repouso), a força que actua no corpo é dada por

$$F = -\frac{GM_\odot m}{(a_\oplus - r)^2} + \frac{GM_\oplus m}{r^2} + \Omega^2(a_\oplus - r)m \tag{3}$$

O que representa cada um dos termos?

b) Igualando a expressão acima a zero, podemos encontrar a posição de equilíbrio do corpo. No caso em que a distância r é muito menor que a distância da Terra ao Sol, podemos encontrar uma expressão exacta para o valor de r que resolve a equação $F = 0$. Mostra que este valor é dado por:

$$r = a_\oplus \sqrt[3]{\frac{M_\oplus}{3M_\odot}} \tag{4}$$

Esta é a expressão da esfera de Hill.

(Sugestão: Começa por utilizar a relação $(1-x)^{-2} \approx 1 + 2x$ quando $x \ll 1$ no primeiro termo da força)

Solução:

a) força gravítica que o Sol exerce no corpo m; força gravítica que a Terra exerce no corpo m e força centrífuga devido à rotação do referencial utilizado.

b) igualando a força gravítica que o Sol exerce na Terra à aceleração centrípeda da Terra, podemos obter uma expressão para a velocidade angular $\Omega = \sqrt{\frac{GM_\odot}{a_\oplus^3}}$.

O denominador do primeiro termo pode ser rescrito de acordo com a sugestao como $\frac{1}{(a_\oplus - r)^2} = \frac{1 + 2(r/a_\oplus)}{a_\oplus^2}$

Substituindo as duas expressões anteriores na equação da força e igualando a 0 obtem-se a expressão para o raio da esfera de Hill.

8. [4 pontos] β Aurigae é um dos sistemas binários mais estudados do céu. Para além de ser uma binária espectroscópica de risca dupla, é também um sistema eclipsante do tipo Algol, apresentando uma suave variação de brilho num período de 3,96 dias.

A imagem abaixo mostra o espectro de β Aur obtido com um equipamento amador, ao longo de toda a fase de variação de brilho da estrela.

A risca espectral mais proeminente é a transição Hα do hidrogênio neutro, cujo comprimento de onda em laboratório é 6562,8 Å. A dispersão do espectro é de 0,42 Å/mm.

Nota-se que o deslocamento das riscas espectrais, provocado pelo movimento relativo de cada uma das componentes, é bastante simétrico, um indicativo de que as duas estrelas que compõem o sistema binário possuem massas muito semelhantes.

Neste problema, iremos considerar que as duas componentes possuem massas iguais. Como o sistema é eclipsante, também iremos considerar que o observamos de perfil, isto é, a componente de velocidade observada é apenas a velocidade radial. Finalmente, iremos supor que a órbita das duas estrelas ao redor do centro de massa do sistema é circular.

a) Qual a velocidade orbital, em km/s, de cada componente?

b) Qual a separação, em U.A., entre elas?

c) Qual a massa das estrelas que compõem esse sistema?

d) A magnitude visual aparente máxima do sistema é m_V= 1,90 mag. Determina a luminosidade de cada componente, sabendo que a paralaxe do sistema é 0,040". Considera que as componentes possuem raios e temperaturas iguais. A correção bolométrica é nula.

e) Se o raio de cada componente é de R = 2,7 $R_\odot$, calcula a temperatura efetiva de cada uma das componentes.

Solução:

a) A separação máxima entre as linhas é de 11,0 mm, portanto para cada componente corresponde a metade desse valor. Em angstroms temos
$\Delta\ \lambda$ = (5,5 mm . 0,42 Å/mm) = 2,31 Å.
$\Delta\ \lambda/\lambda$ = v/c
v = 106 km/s.

b) O raio da órbita pode ser calculado diretamente por

$$a = Pv/2\pi \tag{5}$$

Substituindo os valores temos

$$a = 5,8 \times 10^6 km = 0,038 UA \tag{6}$$

Portanto a separação é de 0,077 U.A.

c) Por Kepler temos

$$(m_1 + m_2) = \frac{4\pi\,(a_1 + a_2)^3}{GP^2} \tag{7}$$

Sendo m1 = m2, e a1 = a2 = a, temos m = 1,95 $M_\odot$ para cada componente.

d) A magnitude absoluta do sistema é
M = -5.log(1/0,04) + 5 + 1,9 = -0,090 mag.
Calculando a luminosidade:

$$M - M_\odot = -2,5 log \frac{L}{L_\odot} \tag{8}$$

Sendo $M_\odot$ = + 4,75, temos L = 86 $L_\odot$ para o sistema, e consequentemente cada componente tem luminosidade L = 43 $L_\odot$.

e) Aplicando

$$L = 4\pi\sigma R^2 T^4 \tag{9}$$

temos que T = 9,0 $\times$ 10^3 K.

9. [2 pontos] Considera um barco situado a longitude de 20° Oeste. Depois de ver o Sol nascer, um marinheiro regista o momento em que vê o Sol sobre o meridiano do lugar no dia 21 de Junho.

a) Neste momento, qual é aproximadamente a hora sideral local?

b) E qual é a hora solar verdadeira?

c) Se a equação do tempo neste instante é igual a 0, qual é a hora civil em Greenwich?

Solução:

a) 21 de Junho corresponde ao solstício de Verão (H. Norte), pelo que a ascenção recta do Sol é 6h. Como o Sol está na sua única passagem meridiana (porque se indica que ele nasce nesse dia, logo não é um astro circumpolar), o seu ângulo horário é 0. Daqui temos HSL = AR + AH = 6 + 0 = 6h.

b) Como o Sol está na sua única passagem meridiana (porque se indica que ele nasce nesse dia, logo não é um astro circumpolar), a hora solar verdadeira é igual a 12h.

c) Como a equação do tempo é 0 neste instante, a hora solar média é igual à hora solar verdadeira. A hora civil de Greenwich é igual à sua hora solar média. Temos então de calcular a diferença horária entre o meridiano de Greenwhich e o meridiano a 20 graus Oeste. 20/15=1h20m. Assim, a hora civil em Greenwich é 12h+1h20m = 13h20m.

10. [3 pontos] O telescópio JWST, com um espelho de diâmetro de 6m está equipado com o instrumento NIRCAM que tem a capacidade para capturar images do universo nos comprimentos de onda entre 0.6μm e os 5μm.

Assume que no universo distante ($2 < z < 12$), a distância utilizada para calcular o diâmetro de objectos (chamada distânca diâmetro angular) pode ser aproximada pela expressão

$$d_A\,[\mathrm{Mpc}] = 6.9(1+z)^2 - 208(1+z) + 2299 \tag{10}$$

a) Qual o tamanho aparente de uma galáxia observada a $z = 6$ com um diâmetro de 2kpc e uma massa total de $\approx 10^{10}\mathrm{M}_\odot$? Mostra se é possível resolver esta galáxia com o NIRCAM em toda a sua cobertura do espectro.

b) A uma distância aparente de $3''$ foi observada uma outra galáxia (com redshift semelhante) com uma velocidade radial medida de 600km/s (assume uma velocidade transversal negligível). Diz, justificando, se é expectável que as duas galáxias se fundam.

c) Estima como varia o tamanho aparente das galáxias ao longo do redshift assumindo que têm um tamanho físico constante de 1kpc. Comenta o resultado.

Solução:

a) Da equação temos $d_A(z=6) \approx 1185$Mpc. Usando a relação trigonométrica $\theta \approx r/d_A$, temos $\theta_{gal} \approx 0.35''$.

A resolução limite do JWST no limite máximo de comprimento de onda (onde a resolução é pior) temos

$$\theta_{tel} = 1.22\frac{5\times 10^{-6}}{6} \approx 0.21'' \quad (11)$$

Como $\theta_{tel} < \theta_{gal}$, é possível resolver sempre esta galáxia com o instrumento NIRCAM.

b) Primeiro calculamos a separação física entre os dois objetos

$$d = \theta d_A \approx 17\text{kpc} \quad (12)$$

Depois estimamos a velocidade de escape relativamente à galáxia central

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{d}} \approx 70\text{km/s} \quad (13)$$

Como a velocidade radial da galáxia é muito superior à velocidade de escape, as duas galáxias vão apenas passar ao lado uma da outra sem se fundir.

c) Aqui a ideia é calcularem pelo menos dois valores do tamanho aparente para um redshift superior e inferior e verificar que o tamanho aparente aumenta com o redshift, i.e. galáxias mais distantes apresentam uma tamanho aparente maior.

Alternativamente podem calcular a derivada e mostrar que esta é negativa em todo o intervalo, mostrando assim que a função apresentada é decrescente com redshift, e portanto, $\theta \propto 1/d_A$ é crescente.

11. [3 pontos] A evolução da espansão do universo pode ser aproximadamente descrita pela equação

$$H^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho = -\frac{kc^2}{a^2} \quad (14)$$

onde H é o parâmetro de Hubble, ρ é a densidade do universo, k uma constante e a o fator de escala.

a) Deriva a expressão para a densidade crítica do universo.

b) Sabendo que a densidade de matéria visível é de $\rho_{b,0} \approx 1.4\times 10^{-27}\text{kg/m}^3$, compara esse valor com o da densidade crítica atual e comenta o resultado. Assume um valor de $H_0 = 70$km/s/Mpc.

c) Qual é a componente que atualmente é dominante na composição do universo? Explica como foi descoberta.

Solução:

a) É necessário saber que a densidade crítica é aquela para a qual o valor de $k=0$. Substituindo na equação acima, podemos ver que

$$H^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho_c = 0 \quad (15)$$

que pode ser reescrita em função de ρ_c para dar

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \tag{16}$$

b) A densidade crítica tem um valor de $9.2 \times 10^{-27}\mathrm{kg/m^3}$, aproximadamente 6 vezes maior que a densidade de matéria visível.

Para a resposta completa é necessário dizer que o universo que medimos uma densidade de matéria aproximadamente igual a 30% da densidade crítica, e que existe uma componente de matéria não visível (matéria escura) que contribui para a densidade total de matéria do universo.

c) para uma resposta completamente certa

40% - energia escura

10% - aproximadamente 70% da densidade

10% - mencionar expansão acelarada

30%[+10% por tipo Ia] - descoberta através da medição da distância a supernovas [tipo Ia]

Tabela de Dados:

Constantes Universais

- Velocidade da luz (vazio): $c = 3 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
- Constante gravitacional: $G = 6.673 \times 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$
- Constante de Stefan-Boltzmann: $\sigma = 5.670 \times 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^2\,K^{-4}}$
- Constante de dispersão de Wien: $b = 2.8976 \times 10^{-3}\,\mathrm{m\,K}$

Dados sobre o Sol

- Massa do Sol: $M_\odot = 1.99 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$
- Raio do Sol: $R_\odot = 6.955 \times 10^{8}\,\mathrm{m}$
- Período médio de rotação do sol: $T = 27$ dias
- Luminosidade do Sol: $L_\odot = 3.846 \times 10^{26}\,\mathrm{W}$
- Magnitude Absoluta Visual do Sol: $M_\odot = 4.83\,\mathrm{mag}$
- Temperatura superficial do Sol: $T_{\mathrm{ef}} = 5780\,\mathrm{K}$

Dados sobre a Terra

- Massa da Terra: $M_\oplus = 5.972 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$
- Raio da Terra: $R_\oplus = 6371 \times 10^{3}\,\mathrm{m}$

Dados sobre a Lua

- Massa da Lua: $M_☾ = 7.348 \times 10^{22}\,\mathrm{kg}$
- Raio da Lua: $R_☾ = 1738 \times 10^{3}\,\mathrm{m}$

Conversão de unidades

- Unidade Astronómica (UA): $1\,\mathrm{UA} = 1.49 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$
- Parsec (pc): $1\,\mathrm{pc} = 3.086 \times 10^{16}\,\mathrm{m}$
- Ano-luz (ly): $1\,\mathrm{ly} = 9.46 \times 10^{15}\,\mathrm{m}$

Relações importantes

- Velocidade angular $\Omega = \frac{2\pi}{T}[\mathrm{rad\,s^{-1}}]$
- Lei de Stefan-Boltzmann: $L = 4\pi R^2 \sigma T_{ef}^4$
- Distância em parsec: $d_{pc} = 10^{\frac{m-M+5}{5}}$
- Magnitude absoluta: $M = -2,5\log(L) + K$, em que K é uma constante
- Lei da Gravitação Universal: $F_g = G\frac{Mm}{r^2}$

- Lei de Wien: $\lambda_{max} = \dfrac{b}{T}$
- Lei dos cossenos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot c \cdot \cos \hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$$